Title	擬凸領域に関する二・三の注意 - とくに$\P^n$の領域について(CR geometryと孤立特異点)
Author(s)	大沢, 健夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1998), 1037: 1-10
Issue Date	1998-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/61958
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1037巻 1998年 1-10

擬凸領域に関する二・三の注意
——とくに$\mathbb{P}^n$の領域について

名古屋大学大学院多元数理
大沢健夫

1. 複素多様体上の擬凸領域

定義1. Mを連結なn次元複素多様体とする。M上の領域とは、連結なn次元複素多様体M'とM'からMへの局所同相正則写像の組をいう.

複素n変数の収束べき級数を$\mathbb{C}^n$における一つの関数要素とみて最大限解析接続したものは、$\mathbb{C}^n$上の領域と自然に同一視できる。このような領域は正則関数の存在域といわれるが、その上には必ず強多重劣調和[1]な皆位関数[2]が存在することが知られている。一般に、複素多様体について強多重劣調和な皆位関数の存在は強い条件であり、この性質で$\mathbb{C}^N$の複素閉部分多様体が特徴づけられることも良く知られた事実である。しかし、今ここに一つの複素多様体Xがあるとして、それが複素ユークリッド空間に何らかの正則写像によって埋め込めるということだけからは、たとえばX上に有界

な非定値正則関数が存在するかどうかもわからない。やはり複素解析学においては、多様体 X にはなるべく適当な境界をつけておいて、その付近での正則関数の挙動が見えるような数学ができると面白いと思う。

というわけで、そのために小論においては複素多様体上の領域の相対境界[3)]の局所的な性質と大域的な性質の関連に焦点を絞って論じてみたい。結果としては主に筆者が K. ディーダリッヒ氏や N. シボニー氏と行なった共同研究の成果を記すが、簡単のため話をすべて複素多様体内の領域に限ることにする。得られた結果を多様体上の領域に対して書き直すことは、今の場合単純作業に属することだからである。

まず局所擬凸性の概念を思い出しておこう。

定義 2. 領域 $D \subset M$ が局所擬凸であるとは、D の任意の境界点 x に対し、M における x の近傍 U で $D \cap U$ が(正則関数の)存在域(と双正則同値)であるようなものがとれることをいう。

$M = \mathbb{C}^n$ の場合には、局所擬凸性をもつ領域は存在域であることはよく知られている。しかし複素多様体内の領域に対しては、一般に局所擬凸性から何らかの大域的性質をみちびくことはほとんどできない。たとえば境界 ∂D が C^ω 級の実超曲面であるような局所擬凸領域で、円環領域と $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$ との直積に双正則同値なものが存在したりする(cf. [Di-For])。

ところが次のような有用な例外がある。

1) 強擬凸領域： $D \Subset M$, $\partial D \in C^2$ かつ各点 $x \in \partial D$ のまわりで D の定義関数のレビ形式が正定値。このとき D は正則凸[4] であり（H. グラウエルト）、それを用いると例外集合[5] の特徴づけができる。

2) $M = \mathbb{P}^n$: $D \neq \mathbb{P}^n$ なる局所擬凸領域は強多重劣調和な皆位関数をもつ。従ってこのとき D は正則凸である。（藤田(玲子)の定理）。これにより有理型関数に対する接続定理が得られる。

特に後者からは、$\mathbb{P}^n$ の局所擬凸領域は $\mathbb{C}^n$ の場合と同様の性質を持つということが予想される。以下においてこの問題を追求してみたい。

2. $\mathbb{P}^n$ の局所擬凸領域

n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内の局所擬凸領域 D $(\neq \mathbb{P}^n)$ について考える。よく知られているように、このとき D はスタイン多様体であり、つぎの命題によって具体的な強多重劣調和皆位関数の存在まで保証される。

> <u>定理 1.</u>（武内、鈴木、Elencwajg）[6] M を正則双断面曲率が正であるようなケーラー多様体、D を M 内の相対コンパクトな局所擬凸領域とする。M 内の二点 z, w 間の距離を

$d(z, w)$で表し、$\delta(z) = \inf_{w \in D^c} d(z, w)$ とおく。このとき関数 $-\log \delta(z)$ について、D上でカレントの意味で

$$\sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}(-\log \delta) > 0$$

がなりたつ。

この定理は、$\mathbb{C}^n$のユークリッド計量に関するHartogs・岡の定理を拡張した形になっており、関数論の根底に微分幾何を据える深い結果である。カレント $\partial\bar{\partial}(-\log\delta)$ の性質は、Dが局所擬凸でない場合にも調べられており、興味深い結果が得られている(cf.[M])。ここでは局所擬凸な場合に話を限る代りに、境界の滑らかさを仮定して $\partial\bar{\partial}(-\log\delta)$ の性質をもう少し詳しく調べてみよう。

まず背景としてDonnelly-FeffermanのL^2コホモロジー消滅定理[7](cf.[Do-Fe])において計量のポテンシャルψが

(1) $$\partial\bar{\partial}\psi \gtrsim \partial\psi\bar{\partial}\psi$$ [8]

をみたすことが重要な条件であるという事実がある。従ってこういう関数が具体的に作れれば面白いと思われるので、自然に次の予想にみちびかれる。

予想　$\partial D \in C^1$ ならば $\mathbb{P}^n$ の Fubini-Study計量に関して

$$\partial\bar{\partial}(-\log\delta) \gtrsim \partial\log\delta\,\bar{\partial}\log\delta$$

Fubini-Study計量の正則双断面曲率は正であり、コンパクトなケーラー多様体Mの正則双断面曲率がいたる所正ならばMは$\mathbb{P}^n$に双正則同値であることも思い出しておこう。

予想の裏付けとして次の事実をあげておく。

定理2. (cf. [Dm]) $\mathbb{C}^n$において境界がLipschitz級の有界擬凸領域は有界な強多重劣調和皆位関数をもつ。

定理2と予想の関係：一般に(1)をみたす関数ψに対し、有界な非定値増加関数λで$\lambda(\psi)$が多重劣調和になるようなものが存在し、逆に有界なC^1級多重劣調和関数φに対し、φの一つの上界をcとすれば、$-\log(c-\varphi)$は(1)をみたす。

$\partial D \in C^1$としたのは滑らかさの仮定をLipschitz級にまで落とすと明白な反例があるからだが、もしかするとC^1級でも反例があるかもしれない。また同じ問題を$\mathbb{C}^n$のユークリッド計量に関して問うことができることにも注意をうながしておきたい。

N.シボニー氏と筆者はこれに関して次の結果を示した。

定理3. 定理1と同じ条件の下で、さらに$\partial D \in C^2$を仮定すれば

$$\partial\bar\partial(-\log\delta) \gtrsim \partial\log\delta\,\bar\partial\log\delta$$

が成立する。

証明については[O-S]を参照して頂きたい。

このことから、$\partial D \in C^2$ なる場合には $\partial\bar\partial(-\log\delta)$ と同様の境界挙動をもつ D 上の計量に対し、L^2 $\bar\partial$ コホモロジー群 $H^{p,q}_{(2)}(D)$ は $p+q \neq n$ なる範囲で 0 になることがわかる。

よってとくに ∂D がレビ平坦[9] な場合には、D と $\mathbb{P}^n \setminus \overline{D}$ について同時に L^2 コホモロジーが消えるということになる。ところが $n \geq 2$ かつ $\partial D \in C^\omega$ のときにはこのようなことが起こりえないということを、$\bar\partial_b$ 方程式の解析を援用して示すことができる(in preparation)。

話は変わるが、有界な強多重劣調和皆位関数をもつ領域は一般のスタイン多様体とは区別して論じる意味があるので、これらを特に超擬凸領域[10] とよぶことになっている。たとえば $\mathbb{C}^n$ 内の有界超擬凸領域 Ω に対し、Ω の Bergman 核を $K_\Omega(z,w)$ とおくと、$K_\Omega(z,z)$ は Ω 上の非有界皆位関数であることが知られている(cf. [O])。定理3からはとくに、$\mathbb{P}^n$ の C^2 級の境界をもつ局所擬凸領域が超擬凸であることが従う。

超擬凸性はスタイン多様体内の相対コンパクト領域に対しては局所的な性質であることが最近 V. ヴェジートゥ氏によって示された。これが $\mathbb{P}^n$ 内の領域に対してはどうかというと、実は反例が見つかった。

<u>定理4.</u> (cf. [D-O]) $\mathbb{P}^5$ の領域で、局所的に超擬凸であるが超擬凸でないものが存在する。

$\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域上で二乗可積分な正則関数の空間を、$\bar{\partial}$ 作用素の L^2 評価式の方法にもとずいて解析することができる。その結果、Bergman核関数について、強擬凸領域上のHörmanderの理論をはじめ、境界における漸近展開式や局所化原理がいくつか得られている。$D \subsetneq \mathbb{P}^n$ のとき、D のBergman核関数に対する局所化原理について、次の結果を示すことができた。

定理5. (cf. [D-O]) D が外点をもつとき、任意の境界点 $x \in \partial D$ および x の任意の近傍対 $U \supset V (\ni x)$ に対してある定数 C が存在して、$D \cap V$ 内の任意の点 z に対し

$$C^{-1} K_D(z, z) < K_{D \cap U}(z, z) < C K_D(z, z)$$

が成立する。

系. D が外点をもてば、D 上には非定値な L^2 正則関数が存在する。

なお $\partial\bar{\partial} \log K_D(z, z)$ についてもこれと同様である。多様体上ではBergman核関数よりもBergman核形式がわかると、双正則変換群の構造との関連上面白いのだが、$\mathbb{P}^n$ の領域についてBergman核形式、Bergman計量のいずれについても上と同様のことは成立しない。そのことは単位円板と $\mathbb{C}$ との直積を考えれば明白であろう。ただし $\partial D \in C^2$ だとうまく

いく（*in preparation*）。このことから $\mathbb{C}^n$ や $\mathbb{C}^* \times \Omega$ のような領域が $\mathbb{P}^n$ 内の C^2 級の滑らかな境界をもつ領域とは決して双正則同値でないことがわかる。

<u>まとめ</u>： $\mathbb{P}^n$ の局所擬凸領域は、一般には $\mathbb{C}^n$ の有界領域とはかけ離れた存在だが、それにもかかわらず定理5のような局所化原理が成立することは面白い。もちろん $\mathbb{C}$ の像を多く含む $\mathbb{C} \times$ 単位円板のようなものに対しても定理5は適用できるわけで、このことは $\mathbb{C}$ の $\mathbb{P}^n$ への埋め込み方にある種の制約があることを示唆している。一方境界が滑らかな場合は一挙に有界領域との類似性が濃くなるわけだから、もしかして次の予想が正しいかもしれない。

<u>予想</u>： $\partial D \in Lip$[11)] ならば ∂D のある近傍上に強多重劣調和関数が存在する。

これが証明できれば本稿で述べた諸結果は大方その下位に属するものになってしまうであろう。

参考文献

[Dm] Demailly, J.-P., *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar\partial$ d'un fibré vectoriel holomorphe semipositif au dessus d'une variété kählerienne complète*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 15 (1982), 457–511.

[Di-For] Diederich, K., Fornaess, J.E., A smooth pseudoconvex domain without pseudoconvex exhaustion, manuscripta Math. 39 (1982), 119–123.

[D-O] Diederich, K., Ohsawa, T., On pseudoconvex domains in $\mathbb{P}^n$, preprint. (in this volume)

[Do-Fe] Donnelly, H., Fefferman, C., L^2 cohomology and index theorem for the Bergman metric, Ann. of Math. 118 (1983), 593-619.

[M] Matsumoto, K., Boundary distance functions and q-convexity of pseudoconvex domains of general order in Kähler manifolds, J. Math. Soc. Japan, 48 (1996), 85–107.

[O] Ohsawa, T., On the Bergman kernel of hyperconvex domains, Nagoya Math. J. 129 (1993), 43-52.

[O-S] Ohsawa, T., Sibony, N., Bounded P.S.H. functions and pseudoconvexity in Kähler manifolds, to appear in Nagoya Math. J.

注. 1) strictly plurisubharmonic 2) exhaustion function 3) relative boundary 4) holomorphically convex 5) exceptional set 6) holomorphic bisectional curvature 7) L^2

cohomology vanishing theorem 8) there exists a (positive) constant C such that $C\partial\bar{\partial}\psi \geq \partial\psi\bar{\partial}\psi$. 9) Levi flat 10) hyperconvex domain 11) ∂D is a Lipschitz smooth real hypersurface

ノート欄